ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Διδάσκων: Ι. Κ. Πουργαράς

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Τετάρτη 29 Σεπτεμβρίου 2015, 9-12 μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

1. (i) Να βρεθεί η λύση z_0 της εξίσωσης

$$2yz_x + xz_y = 0, \quad x > 0$$

για την οποία είναι $z_0(1, y) = y$.

(ii) Αν y_0 είναι η λύση του π. α. τ.

$$y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = a, y'(0) = b, y''(0) = c,$$

να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα a, b, c ώστε να είναι $lim_{x\to+\infty} y_0(x) = 0$.

2. (i) Να λυθεί το π. α. τ.

$$y' + x + y + 1 = (x + y)^2 e^{2x}, \quad y(0) = 1.$$

(iia) Με χρήση του μετασχηματισμού $z = tgy$, να επιλυθεί το πρόβλημα

$$2y' + x(sin2y) + 2x(tgy)(siny) = 0, \quad y(0) = c.$$

(iib) Αν y_0 είναι η λύση με $y_0(0) = \frac{9\pi}{4}$, να βρεθεί η y_0 και να εξετασθεί η σύγκλιση της y_0 στα άκρα του π.ο. της.

(iic) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης με α) $y(0) = \frac{\pi}{2}$ β) $lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}$ γ) $lim_{x\to\infty} y(x) = 2015$.

3. (i) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x - 1)y' + 3y = 0, \quad y(1) = a, y'(1) = b$$

(ii) Αν y_1, y_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης με αρχικές τιμές, αντίστοιχα, $y_1(1) = 0, y_1'(1) = a$ και $y_2(1) = b, y_2'(1) = 0$, $(ab \neq 0)$, να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $lim_{x\to1^-} \int_{1-x}^{1+x} y_1(s)y_2(s)ds$.

(i) Ας είναι $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής δ.ε. $n-$ τάξης.

(ia) Να εξετασθεί η αλήθεια του ισχυρισμού: για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $p_1, p_2, \dots, p_n : I \to (0, +\infty)$ στο $C^n(I)$, υπάρχει ομογενής γ.δ.ε. $n-$ τάξης που έχει ως βασικό σύνολο λύσεων το σύνολο $\{p_1y_1, \dots, p_ny_n\}$.

(ib) Να εξετασθεί το προηγούμενο ερώτημα για την περίπτωση $n = 2$ με $p_1 = p_2 = p$.

(II) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα του υποβιβασμού της τάξης για την εξίσωση

$$y''(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0, \quad x \in I.$$

(III) Αν $y_1, y_2 \in C^2(I))$ και υπάρχει $x_0 \in I$ με $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, να αποδειχθεί ότι οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών: α) υπάρχει γραμμική ομογενής εξίσωση δ.ε. στο I με το $\{y_1, y_2\}$ βασικό σύνολο λύσεων β) υπάρχει διάστημα I_0 και ομογενής γραμμική δ.ε. στο I_0 έτσι ώστε το $\{y_1, y_2\}$ να είναι βασικό σύνολο λύσεων.

5. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y''(x) + 2p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad x \in I.$$

(I) Με χρήση της αντικατάστασης $y = ue^{a\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$, όπου a είναι κατάλληλη σταθερά, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση ανάγεται σε μια εξίσωση της μορφής

$$u''(x) + Q(x)u(x) = 0, \quad x \in I.$$

(II) Αν $\{u_1, u_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ανηγμένης εξίσωσης, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{u_1 e^{a\int_{x_0}^{x} ap(s)ds}, u_2 e^{a\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της αρχικής εξίσωσης.

(III) Αν $q = p' + p^2 + \lambda^2$, να επιλυθεί η αρχική εξίσωση. Εφαρμογή για $p(x) = x, q(x) = x^2 + 5$.

Ζητούνται απαντήσεις σε τέσσερα (4) Θέματα.

Απαραίτητη προϋπόθεση για επιτυχή βαθμολόγηση (≥ 5) είναι να δοθούν σωστές απαντήσεις σε τουλάχιστον ένα ερώτημα από τουλάχιστον τρία θέματα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ